Devoir libre n° 1

Exercice 1

1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes
   P :(($\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$) ou "4 est premier) Q :($2, 3 \notin \mathbb{N}$ et $|1-\sqrt{2}| = 1-\sqrt{2}$).
   R :($(\forall x \in \mathbb{R}), x^3 \geq x^2$). S :($(\exists n \in \mathbb{N}), n^2 - 6n + 9 = 0$).
2. On considère la proposition suivante : $T : (\forall x \in \mathbb{R}), 3x^2 - 4x + 2 \leq 0$
   (a) Donner la négation de T.
   (b) Déterminer la valeur de vérité de la proposition T.
3. En utilisant le raisonnement par équivalence,montrer que pour tout $a \in [3; +\infty[$ et $a \in [-1; +\infty[$ on a : $\left[\sqrt{a-3} + \sqrt{b+1} = \frac{a+b}{2}\right] \Longleftrightarrow [a = 4 \text{ et } b = 0]$
4. En utilisant le raisonnement par la contraposée ,montrer que :
   $\forall x \in \mathbb{R}^+ : (x \neq 1) \Rightarrow \left(\dfrac{3-x}{1+\sqrt{x}} \neq 2 - \sqrt{x}\right)$.
5. En utilisant le raisonnement par récurrence ,montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ 2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$.

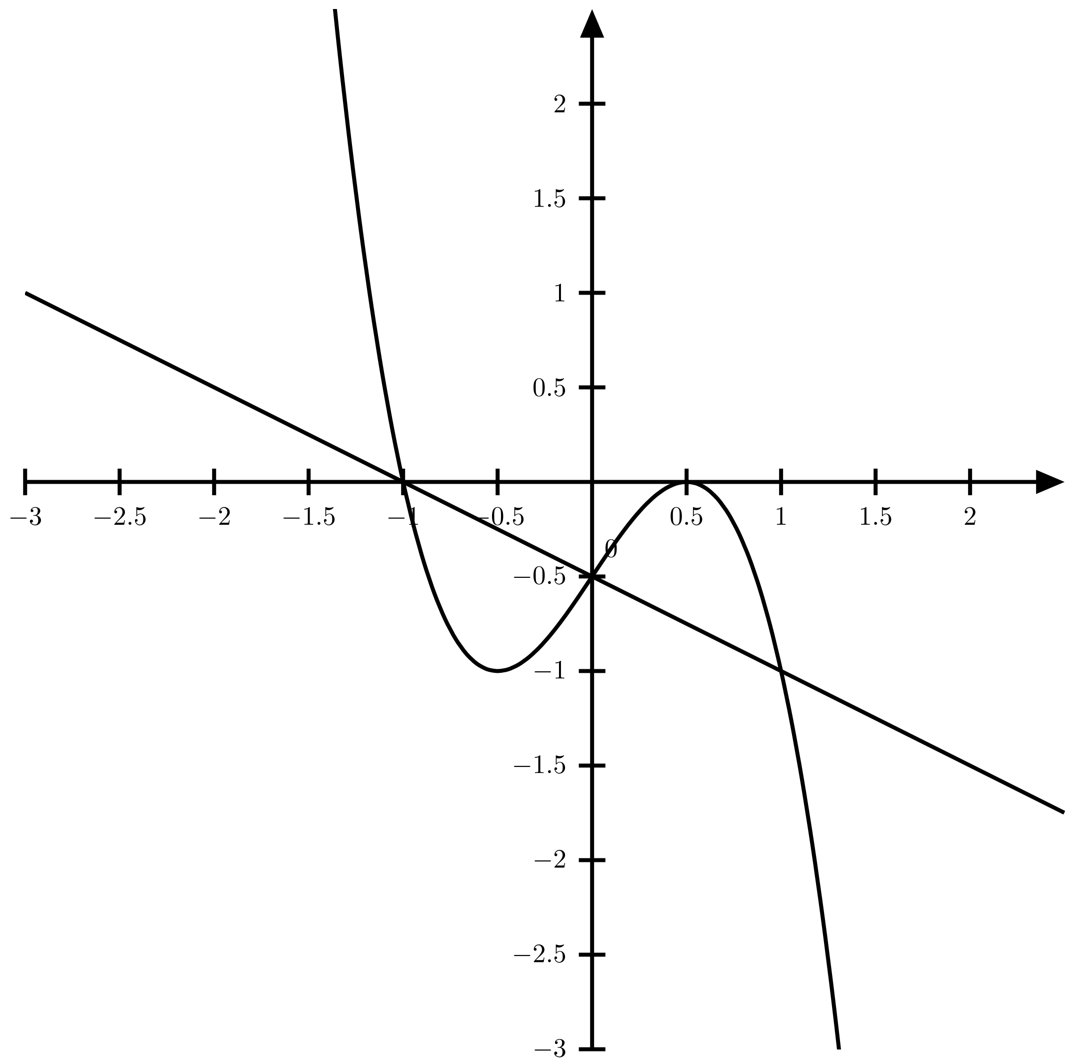
1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
2. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ par $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$.
3. Est-ce que $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$ sont des extremums de f sur $\mathbb{R}$?.
4. (a) Soient x et y deux réels tels que $x \neq y$.Montrer que $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{1-xy}{(x^2+1)(y^2+1)}$.
   (b) Déduire les variations de la fonction f sur les intervalles $[1; +\infty[$,$[-1; 1]$ et $]-\infty; -1]$.

Exercice 3

1. Soit h une fonction périodique définie par :$h(x) = 2\sin(3x - \pi)$.déterminer la période de h.

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ et la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est la suivante :



1. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
3. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Correction du devoir libre n^o 1

Exercice 1

1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes
   - Déterminer la valeur de vérité P :(($\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$) ou 4 est premier).
     La valeur de vérité de ($\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$) est vraie, et celle de (4 est premier) est fausse.
     Alors, la valeur de vérité de P est vraie.
   - Déterminer la valeur de vérité Q :($2,3 \notin \mathbb{N}$ et $|1-\sqrt{2}| = 1-\sqrt{2}$).
     La valeur de vérité de ($2,3 \notin \mathbb{N}$) est vraie, et celle de ($|1-\sqrt{2}| = 1-\sqrt{2}$) est fausse.
     Alors, la valeur de vérité de Q est fausse.
   - Déterminer la valeur de vérité R :($(\forall x \in \mathbb{R}), x^3 \geq x^2$).
     Pour $x = \frac{1}{2}$, on a $x^3 = \frac{1}{8} < x^2 = \frac{1}{4}$.
     Alors, la valeur de vérité de R est fausse.
   - Déterminer la valeur de vérité S :$(\exists n \in \mathbb{N}), n^2 - 6n + 9 = 0)$.
     On considère, dans $\mathbb{N}$, l'équation (E) : $n^2 - 6n + 9 = 0$.
     On a $$\begin{aligned}(E) &\Longleftrightarrow n^2 - 2 \times n \times 3 + 3^2 = 0\\ &\Longleftrightarrow (n-3)^2 = 0\\ &\Longleftrightarrow n - 3 = 0\\ &\Longleftrightarrow n = 3 \in \mathbb{N}\end{aligned}$$
     Alors, la valeur de vérité de S est vraie.
2. On considère la proposition suivante : $T : (\forall x \in \mathbb{R}), 3x^2 - 4x + 2 \leq 0$
   (a) Donner la négation de T.
   La négation de T est $\overline{T} : (\exists x \in \mathbb{R}), 3x^2 - 4x + 2 > 0$.
   (b) Déterminer la valeur de vérité de la proposition T.
   Pour $x = 0$, on a $3x^2 - 4x + 2 = 2$ et $2 > 0$.
   Alors, la valeur de vérité de $\overline{T}$ est vraie.
   D'où, la valeur de vérité de T est fausse.
3. En utilisant le raisonnement par équivalence,montrer que pour tout $a \in [3; +\infty[$ et $a \in [-1; +\infty[$ on a : $\left[\sqrt{a-3} + \sqrt{b+1} = \frac{a+b}{2}\right] \Longleftrightarrow [a = 4 \text{ et } b = 0]$.
   On a $$\begin{aligned} & \left[\sqrt{a-3} + \sqrt{b+1} = \tfrac{a+b}{2}\right]\\ \Longleftrightarrow\ & \left[2\sqrt{a-3} + 2\sqrt{b+1} = a + b\right]\\ \Longleftrightarrow\ & \left[(a - 2\sqrt{a-3}) + (b - 2\sqrt{b+1}) = 0\right]\\ \Longleftrightarrow\ & \left[(a - 3 + 3 - 2\sqrt{a-3}) + (b - 2\sqrt{b+1}) = 0\right]\\ \Longleftrightarrow\ & \left[(a - 3 - 2\sqrt{a-3} + 1) + (b + 1 - 2\sqrt{b+1} + 1) = 0\right]\\ \Longleftrightarrow\ & \left[(\sqrt{a-3} - 1)^2 + (\sqrt{b+1} - 1)^2 = 0\right]\\ \Longleftrightarrow\ & \left[\sqrt{a-3} - 1 = 0 \text{ et } \sqrt{b+1} - 1 = 0\right]\\ \Longleftrightarrow\ & \left[\sqrt{a-3} = 1 \text{ et } \sqrt{b+1} = 1\right]\\ \Longleftrightarrow\ & [a = 4 \text{ et } b = 0]\end{aligned}$$
4. En utilisant le raisonnement par la contraposée ,montrer que :
   $\forall x \in \mathbb{R}^+ : (x \neq 1) \Rightarrow \left(\dfrac{3-x}{1+\sqrt{x}} \neq 2 - \sqrt{x}\right)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}^+$, il suffit de montrer que $\left(\dfrac{3-x}{1+\sqrt{x}} = 2 - \sqrt{x}\right) \Rightarrow (x = 1)$.

On a $\left(\dfrac{3-x}{1+\sqrt{x}} = 2-\sqrt{x}\right) \Longrightarrow (3-x = (2-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}))$
$\Longrightarrow (3-x = -x+\sqrt{x}+2)$
$\Longrightarrow (\sqrt{x} = 1)$
$\Longrightarrow (x = 1)$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}^+ : (x \neq 1) \Rightarrow \left(\dfrac{3-x}{1+\sqrt{x}} \neq 2-\sqrt{x}\right)$.

5. En utilisant le raisonnement par récurrence ,montrer que :
$\forall n \in \mathbb{N}^* :\ 2+4+\cdots+2n = n(n+1)$.
Pour $n=1$, on a $2 = 1(1+1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons que $2+4+\cdots+2n = n(n+1)$,
et montrons que $2+4+\cdots+2n+2(n+1) = (n+1)(n+2)$.
On a $2+4+\cdots+2n+2(n+1) = n(n+1)+2(n+1)$
$= (n+1)(n+2)$
D'où, par principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ 2+4+\cdots+2n = n(n+1)$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ /\ x^2+1 \ \neq 0\} = \mathbb{R}$.

2. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ par $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x^2+2x+1}{2(x^2+1)} = \dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}$.
Puisque $\forall x \in \mathbb{R} :\ (x+1)^2 \geq 0$ et $2(x^2+1) > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R} :\ \dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)} \geq 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R} :\ f(x) \geq \dfrac{1}{2}$.
D'où la fonction f est minorée par $\dfrac{1}{2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{-x^2+2x-1}{2(x^2+1)} = \dfrac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)}$.
Puisque $\forall x \in \mathbb{R} :\ -(x-1)^2 \leq 0$ et $2(x^2+1) > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R} :\ \dfrac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)} \leq 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R} :\ f(x) \leq \dfrac{3}{2}$.
D'où la fonction f est majorée par $\dfrac{3}{2}$.

3. Est-ce que $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$ sont des extremums de f sur $\mathbb{R}$?
D'après la question 2, on a f est bornée sur $\mathbb{R}$ par $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$.
De plus, on a $f(-1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \dfrac{3}{2}$.
Donc $\dfrac{1}{2}$ est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$, et $\dfrac{3}{2}$ sa valeur maximale.

4. (a) Soient x et y deux réels tels que $x \neq y$.Montrer que $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{1-xy}{(x^2+1)(y^2+1)}$.

(b) Déduire les variations de la fonction f sur les intervalles $[1;+\infty[$,$[-1;1]$ et $]-\infty;-1]$.
D'après la question 4.a, le signe $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est celui de $1-xy$.
Soient x et y de $[1;+\infty[$.
On a $x \geq 1$ et $y \geq 1 \Longrightarrow xy \geq 1$.
$\Longrightarrow 1-xy \leq 0$
$\Longrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0$
Donc f est décroissante sur $[1;+\infty[$.
Soient x et y de $[-1;1]$.
On a $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1 \Longrightarrow |xy| \leq 1$.
$\Longrightarrow -1 \leq xy \leq 1$
$\Longrightarrow 0 \leq 1-xy \leq 2$
$\Longrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$
Donc f est croissante sur $[-1;1]$.
Soient x et y de $]-\infty;-1]$..
On a $x \leq -1$ et $y \leq -1 \Longrightarrow xy \geq 1$.
$\Longrightarrow 1-xy \leq 0$
$\Longrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0$
Donc f est décroissante sur $]-\infty;-1]$..

Exercice 3

1. Soit h une fonction périodique définie par :$h(x)=2\sin(3x-\pi)$.
   Déterminer la période de h.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$\begin{aligned} h(x) &= 2\sin(3x-\pi) \\ &= 2\sin(3x-\pi+2\pi) \\ &= 2\sin(3x+2\pi-\pi) \\ &= 2\sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\pi\right) \\ &= h\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $x+\frac{2\pi}{3} \in \mathbb{R}$ et $h\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=h(x)$,
   D'où, h est périodique, de période $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^3+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ et la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ est la suivante :

1. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.
   On a $S=\{-1;0,5\}$.
2. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.
   On a $S=\{-1;0;1\}$.
3. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.
   On a $S=[-1;0] \cup [1;+\infty[$.