Devoir libre n^{o} 1

Exercice 1

1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :
   P :$(\sqrt{3}+\sqrt{4} > \sqrt{7})$ ou "$\pi \in \mathbb{Z}$" Q :$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^{+})$: $x+y > x\sqrt{y})$.
   R :$((\forall n \in \mathbb{N}), \dfrac{n^2+1}{3} \in \mathbb{N})$. S :$(\forall x \in [4;+\infty[), x^2-5x+4 \leq 0)$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2}$.
   On considère la proposition T : $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2); f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$.
   (b) Donner la négation de T.
   (c) Déduire que la proposition T est fausse.
3. En utilisant le raisonnement par équivalence successives, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+}; \frac{x+\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} \leq \sqrt{x}+3.$$
4. En utilisant le raisonnement par disjonction des cas, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2-x+1.$$
5. En utilisant le raisonnement par l'absurde ,montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+} : \sqrt{x} \neq \dfrac{x+2}{\sqrt{x+4}}$.
6. En utilisant le raisonnement par récurrence ,montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 3^n \geq 1+2n$.

Exercice 2

Soit f et g les fonctions définies par :$f(x) = x^2-4x+5$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f ;g ; $g \circ f$ et $g \circ g$
2. Déterminer l'expression de $g \circ f(x)$ et $g \circ g(x)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
2. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ par -1 et $\dfrac{1}{3}$.
3. Est-ce que $\dfrac{1}{3}$ est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$?.
4. (a) Soient x et y deux réels tels que $x \neq y$.Montrer que $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{1-xy}{(x^2+x+1)(y^2+y+1)}$.
   (b) Déduire les variations de la fonction f sur les intervalles $[1;+\infty[$,$[-1;1]$ et $]-\infty;-1]$.