Série 2 : Généralités sur les fonctions numériques

Exercice 1

Soit f et g les fonctions définies par :$f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f ;g ;$f \circ g$;$g \circ f$
2. Déterminer l'expression de $f \circ g(x)$;$g \circ f(x)$ et $g \circ g(x)$.

Exercice 2

1. Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{2\sqrt{x+2}+3}$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$.
   Déterminer la fonction h telle que :$f = h \circ g$.
2. Soit f et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = x - 1$ et $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$.
   Déterminer la fonction g telle que : $h = g \circ f$.

Exercice 3

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{-x}{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f ;g et $g \circ f$.
2. Montrer que $\forall x \in]-2; +\infty[$;$f(x) > -1$.
3. Déterminer les variations de chacune des fonctions f et g. En déduire les variations de la fonction $g \circ f$.

Exercice 4

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $g(x) = x\sqrt{x}$.

1. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur D.
3. En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$;$g(x) \in [0, 1]$.
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. En utilisant les variations des fonctions f et g, étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = x^3 - 2x\sqrt{x} + 2$.

Exercice 5

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$

1. (a) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f et g.
   (b) Représenter dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les courbes (C_f) et (C_g) des fonctions f et g.
2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par :$h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$.
   En utilisant la propriété de la monotonie de la composée de deux fonctions, montrer que la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$, puis montrer que :$(\forall x \in \mathbb{R}^+)$;$0 \leq h(x) < 1$.
   Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par :$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{2x^2 - 4x + 3}$.

1. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$: $2x^2 - 4x + 3 > 0$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{2} < f(x) \leq 1$.

2. Soient u et v les fonctions définies par : $u(x) = x^2 - 2x$ et $v(x) = \frac{x+2}{2x+3}$.
   (a) Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions u et v.
   (b) En utilisant les variations de u et de v, étudier les variations de f sur les intervalles $[1; +\infty[$ et $]-\infty; 1]$.
3. Soit g la fonction définie par :$g(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 2}{2x^2 - 4x + 3}}$.
   (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} : \ \frac{\sqrt{2}}{2} < g(x) \leq 1$.
   (b) Étudier la monotonie de g sur les intervalles $[1; +\infty[$ et $]-\infty; 1]$.

Exercice 7

On considère la fonction définie par : $f(x) = x + 2 - \sqrt{x+2}$.

1. (a) Déterminer D, l'ensemble de définition de f.
   (b) Montrer que : $\forall x \in D : \ f(x) \geq -\frac{1}{4}$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2$.
2. Soient u et v les fonctions définies par : $u(x) = x^2 - x$ et $v(x) = \sqrt{x+2}$.
   (a) Déterminer les variations de v sur son ensemble de définition et tracer sa courbe.
   (b) Déterminer $v\left(\left[-2; -\frac{7}{4}\right]\right)$ et $v\left(\left[-\frac{7}{4}; +\infty\right]\right)$.
   (c) Dresser le tableau de variation de u sur $\mathbb{R}$.
   (d) Vérifier que : $\forall x \in D : \ f(x) = (u \circ v)(x)$.
   En déduire la monotonie de f sur les intervalles $\left[-2; -\frac{7}{4}\right]$ et $\left[-\frac{7}{4}; +\infty\right]$.

Exercice 8

Soit f la fonction définit par : $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+1}$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. Vérifier que : $\forall x \in D_f : \ f(x) = 1 - \frac{4}{x^2+1}$.
3. Montrer que f est bornée par -3 et 1.

Exercice 9

Soient f et g les fonctions définit par : $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{x+4}$.

1. Donner D_f et D_g les domaines de définition de f et g.
2. Déterminer les points d'intersection des courbes de f et de g avec les axes du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
3. Construire les courbes de f et de g.
4. Résoudre graphiquement, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\frac{x+4}{x+2} \leq \sqrt{x+4}$.

Exercice 10

Soit f la fonction définit par : $f(x) = \frac{-2|x|+1}{|x|-2}$.

1. Vérifier que la courbe de f symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. Étudier les variations de f sur les intervalles $]2; +\infty[$ et $]-\infty; -2[$.
3. Soit g la fonction définit par : $g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-4x^3+1}{x^3-1}\right)$.
   (a) Vérifier que : $\forall x \in]1; +\infty[: \ g(x) = f(2x^3)$.
   (b) En déduire les variations de g sur l'intervalle $]1; 2]$