Fonctions numériques :Généralités

1 Fonction numérique d'une variable réelle-Ensemble de définition

1.1 Définitions et notations

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.On appelle fonction numérique définie sur D,toute relation f qui,à tout élément x de D associe un unique réel y,et on note $f(x) = y$.On écrit :

$$f \ : \ \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y \end{array}$$

- L'élément x de D est appelé la variable.
- D est l'ensemble de définition de la fonction f (noté aussi D_f) ,c'est l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels $f(x)$ existe.On écrit :$D = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \mathbb{R}\}$.
- Le nombre $f(x)$ est l'image de x par la fonction f.
- Si x vérifie $f(x) = y$, on dit que x est un antécédent de y.

Exemples

- Soit la fonction définie sur intervalle $[-3; 5]$ par l'expression : $f(x) = x^2 - x + 2$.
  L'ensemble de définition est $[-3; 5]$.
  Le nombre 4 a pour image $f(4) = 14$.
  On calcule $f(0) = 2$ et $f(1) = 2$. Ainsi 0 et 1 sont deux antécédents de 2 par f.
- Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 - x$ Déterminer l'image de -5 ; 0 ; 3 et 10, puis rechercher les antécédents de 0.

1.2 Quelques types de fonctions

Soit f une fonction numérique et D_f son domaine de définition.

- Toute fonction f de la forme $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. est appelée la fonction polynôme.On a :$D_f = \mathbb{R}$.
- Toute fonction f de la forme $f : x \mapsto ax + b$ est appelée la fonction affine.On a : $D_f = \mathbb{R}$.
  - Si $b = 0$,il s'agit d'une fonction linéaire.
  - Si $a = 0$ on parle de la fonction constante.
- Toute fonction f de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est appelée la fonction polynôme du second degré. On a : $D_f = \mathbb{R}$.
- Toute fonction f de la forme $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est appelée la fonction inverse.On a :$D_f = \mathbb{R}^*$.
- Toute fonction f de la forme $f : x \mapsto \frac{g(x)}{h(x)}$ avec g et h deux fonctions polynômes est appelée la fonction rationnelle.On a :$D_f = \{x \in \mathbb{R}/h(x) \neq 0\}$.
- Toute fonction f de la forme $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ est appelée la fonction homographique.On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R}/cx + d \neq 0\}$.
- Toute fonction f de la forme $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est appelée la fonction de la racine carré.$D_f = \mathbb{R}^+$.
- Toute fonction de la forme $f : x \mapsto \sqrt{g(x)}$ est de domaine de définition :$D_f = \{x \in \mathbb{R}/g(x) \geq 0\}$.

Exemples

- Le domaine de définition de la fonction : $f : \ x \mapsto x^2 + x\sqrt{3} - 2$.
  ....
  ....
- Le domaine de définition de la fonction : $g : \ x \mapsto \frac{x+3}{2x-1}$.
  ....
  ....
- Le domaine de définition de la fonction : $h : \ x \mapsto \sqrt{3x + 4}$.
  ....
  ....

— Le domaine de définition de la fonction : $k: \ x \mapsto x^2 - 3\sqrt{x} + 5$.
....
....

— Le domaine de définition de la fonction : $g: \ x \mapsto \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$.
....
....
....

Exercice 1

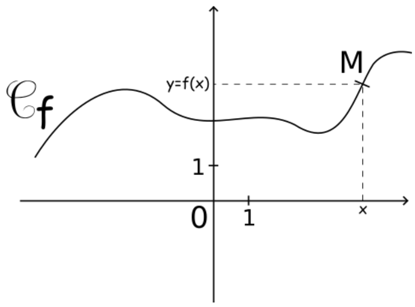
Donner le domaine de définition D_{f_i} de la fonction f_i dans les cas suivants :

a) $f_1: \ x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$.
b) $f_2: \ x \mapsto -2x^3 + 3x$.
c) $f_3: \ x \mapsto \frac{3x-1}{2x-4}$.
d) $f_4: \ x \mapsto \frac{5x+1}{x^2-x-2}$.
e) $f_5: \ x \mapsto \sqrt{3x-6}$.
f) $f_6: \ x \mapsto \dfrac{3x^3 - x - 1}{\sqrt{15-5x}}$.
g) $f_7: \ x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

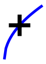
2 Représentation graphique d'une fonction numérique

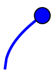
Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.Soit f une fonction numérique et D une partie de $\mathbb{R}$.
La représentation graphique de la fonction f définie sur D est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$
où x est dans D et $f(x)$ l'image de x. les valeurs de x se placent sur l'axe des abscisses, celles de $f(x)$ se placent sur l'axe des ordonnées.
Cet ensemble est une courbe, noté C_f.Et on écrit :
$C_f = \{M(x;y)/x \in D \text{ et } y = f(x)\}$
L'équation de cette courbe est $y = f(x)$.



Remarques

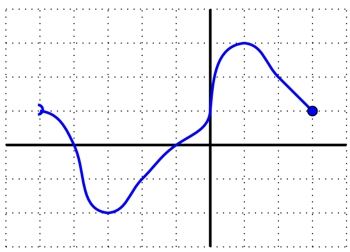
— Si $A \in C_f$,on représente A comme suit :  .

— Si A est à l'extrémité de la courbe alors,on représente A comme suit :  .

— Si A n'est pas à l'extrémité de la courbe alors,on représente A comme suit :  .

Exemples

1. Soit f une fonction définie par :$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.Et C_f la représentation graphique de f.
   — Déterminer le domaine de définition de f.
   — Est ce-que $A(1;0) \in C_f$?.De même pour $B(3;\frac{1}{2})$ et $C(\sqrt{2};\sqrt{2}+1)$.
2. Soit g une fonction et C_g la représentation graphique de g.
   — Domaine de définition de g ....
   — L'image de 1 par la fonction g ....
   — Les antécédents du nombre -1 par la fonction g ....
   — Les points d'intersections de C_g et l'axe des abscisses ....
   — Les points d'intersections de C_g et l'axe des ordonnés. ....



3. $h: x \mapsto x^2$.
   — Domaine de définition de h
   ....
   ....
   — Le tableau de valeurs de h :

x						
$h(x)$						

3 Égalité de deux fonctions

Définition

Soient f et g deux fonctions numériques.On dit que f et g sont égales si et seulement si :
— $D_f = D_g = D$
— Pour tout x de D ,on a :$f(x) = g(x)$

Exemples

Comparer les fonctions f et g dans les cas suivants :

1. $f: x \mapsto x+1$ et $g: x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$.
2. $f: x \mapsto \sqrt{x^2-2x}$ et $g: x \mapsto \sqrt{x}\sqrt{x-2}$.

4 Fonction paire-Fonction impaire

4.1 Définitions

Définition 1

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. On dit que D est symétrique par rapport à zéro ou que D est centré en zéro, si et seulement si : Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $[x \in D$ si et seulement si $-x \in D]$

Exemples

$[-1;1]$, $]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[$

Définition 2

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x et D_f son domaine de définition.

1. On dit que$f$ est une fonction pair si et seulement si :
   — Pour tout $x \in D_f$,on a $-x \in D_f$.
   — Pour tout $x \in D_f$,on a $f(-x) = f(x)$.
2. On dit que$f$ est une fonction impair si et seulement si :
   — Pour tout $x \in D_f$,on a $-x \in D_f$.
   — Pour tout $x \in D_f$,on a $f(-x) = -f(x)$.

Exemples

1. $f: x \mapsto \dfrac{x^2+3}{|x|-1}$.

2. $f: x \mapsto \dfrac{\sin(x) - x}{x^2 - 1}$.
3. $f: x \mapsto x^3 + x^2$.

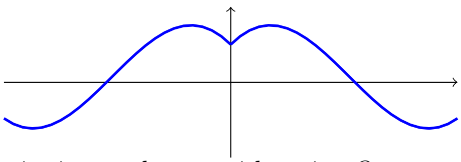
4.2 La parité de la fonction et la représentation graphique

.

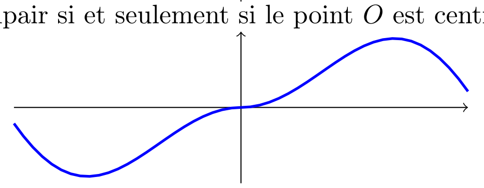
Propriété

Soit f une fonction numérique d'une variable x ,D_f son domaine de définition et C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

— f est pair si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de Cf.



— f est impair si et seulement si le point O est centre de symétrie de Cf.

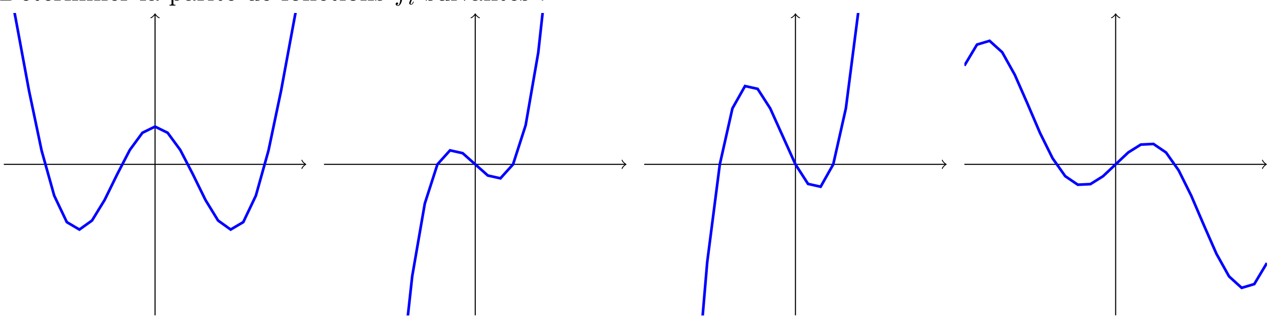


Exercice 2

1. Déterminer la parité de fonctions suivantes :

   a) $f_1(x) = \frac{1}{2x-3}$ b) $f_2(x) = x^2 - 3x$ c) $f_5(x) = \frac{x}{4x^2+1}$ d) $f_6(x) = \frac{x+1}{3\sqrt{x}}$.

2. Déterminer la parité de fonctions f_i suivantes :



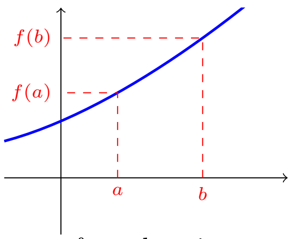
5 Variations d'une fonction numérique

Définition

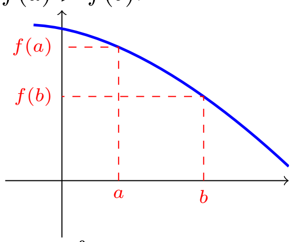
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.

— On dit que f est croissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout a et b de I tel que $a < b$, on a :$f(a) \leq f(b)$.

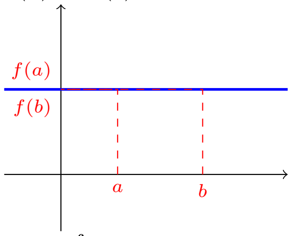
— On dit que f est strictement croissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout a et b de I tel que $a < b$, on a :$f(a) < f(b)$.



— On dit que f est décroissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout a et b de I tel que $a < b$, on a :$f(a) \geq f(b)$.
— On dit que f est strictement décroissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout a et b de I tel que $a < b$, on a :$f(a) > f(b)$.



— On dit que f est constante sur l'intervalle I si et seulement si pour tout a et b de I tel que $a < b$, on a :$f(a) = f(b)$.



— On dit que f est monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.
— On dit que f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Tableau de variations d'une fonction

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x et D_f son domaine de définition.Étudier les variations de la fonction f c'est déterminer les intervalles de D_f sur lesquels la fonction f est soit strictement croissante ,soit strictement décroissante ,soit constante.
Les résultats de cette étude peuvent être résumés dans un tableau appelé tableau de variations de la fonction f,ou une flèche montante$\nearrow$ signifie que f est strictement croissante et une flèche descendante$\searrow$ signifie que f est strictement décroissante.

Exemples

Étudier les variations de la fonction f dans les cas suivants :
1. $f : x \mapsto x^2 - 4x + 1$; $I = [2; +\infty[$.
2. $f : x \mapsto -3x + 4$; $I = \mathbb{R}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$; $I =]-\infty; -1[$ et $J =]-1; +\infty[$

5.1 Taux de variations et la monotonie.

Définition

La fonction f définie sur un intervalle I.Soient a et b deux nombres quelconques dans I tels que $a \neq b$. Le nombre $T(a, b) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ est appelé le taux de variations de la fonction f entre a et b.
Soit les points $M(a; f(a))$ et $N(b; f(b))$,le taux de variation est le coefficient directeur de la droite (MN).

Propriétés

Soit $T(a,b)$ le taux de variations entre a et b de la fonction f.On a :

— f est croissante sur I si et seulement si $T(a,b) \geq 0$.
— f est strictement croissante sur I si et seulement si $T(a,b) > 0$.
— f est décroissante sur I si et seulement si $T(a,b) \leq 0$.
— f est strictement décroissante sur I si et seulement si $T(a,b) < 0$.
— f est constante sur I si et seulement si $T(a,b) = 0$.

Exemples

1. Étudier les variations de la fonction f définie par :$x \mapsto x^2 - 4x + 3$ sur $[2, +\infty[$ et $]-\infty; 2]$.
2. Étudier les variations de la fonction g définie par :$x \mapsto \dfrac{x+3}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$ et $]-\infty; 1[$.

5.2 La parité et la monotonie.

Propriété

f une fonction numérique définie sur D_f avec $D_f = I^+ \cup I^-$.

— f est une fonction pair et croissante sur I^+ donc f est décroissante sur I^-.
— f est une fonction impair et croissante sur I^+ donc f est croissante sur I^-.
— f est une fonction pair et décroissante sur I^+ donc f est croissante sur I^-.
— f est une fonction impair et décroissante sur I^+ donc f est décroissante sur I^-.

Exemples

— f une fonction numérique définie par $x \mapsto x^2 + 1$.
1. Donner D_f le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Étudier La monotonie de f sur $[0; +\infty[$.Puis dresser le tableau de variation da la fonction f.

— g une fonction numérique définie par $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x}$.
1. Donner D_g le domaine de définition de g.
2. Étudier la parité de la fonction g.
3. Étudier La monotonie de g sur$]0; 1]$ et $[1; +\infty[$.Puis dresser le tableau de variation da la fonction g.

6 Valeurs maximales et valeurs minimales d'une fonction numérique sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et a un élément de I.

— On dit que $f(a)$ est la valeur maximale de la fonction f sur I si :$f(x) \leq f(a)$ pour tout x de I.

— On dit que $f(a)$ est la valeur minimale de la fonction f sur I si :$f(x) \geq f(a)$ pour tout x de I.

— si $f(a)$ est une valeur maximale ou une valeur minimale de la fonction f ,alors on dit que $f(a)$ est un extremum de la fonction f.

Figures

7 Position relative de deux courbes

Propriété

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur $I.C_f$ et C_g les représentations graphiques de f et g respectives.

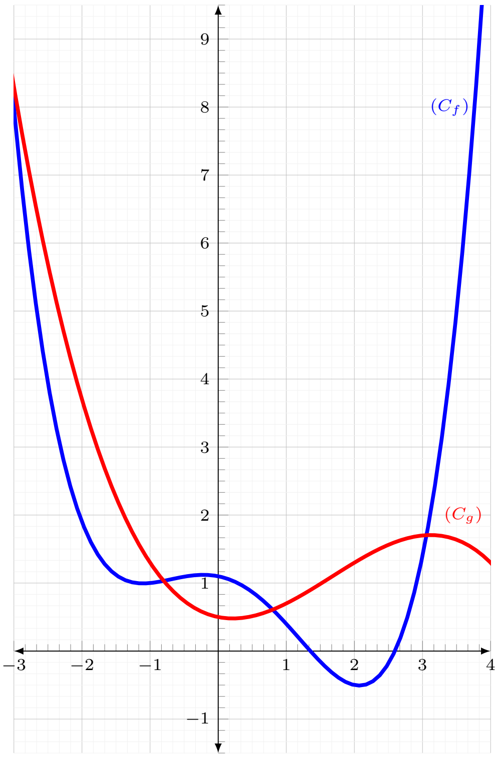
— si pour tout x de I $f(x) > g(x)$ alors C_f est strictement au dessus de C_g sur I .

— si pour tout x de I $f(x) < g(x)$ alors C_f est strictement au dessous de C_g sur I .

— Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

Exemple

soit C_f et C_g les représentations graphiques de f et g respectives.



1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :$f(x) = g(x)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :$f(x) < g(x)$ et $f(x) > g(x)$