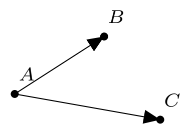
Produit scalaire dans le plan.

1 Produit scalaire (Rappel)

1.1 Définitions

Définition 1(Expression trigonométrique)

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel :$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$

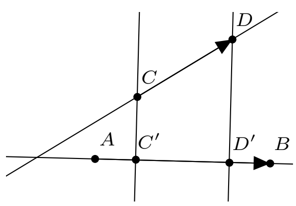


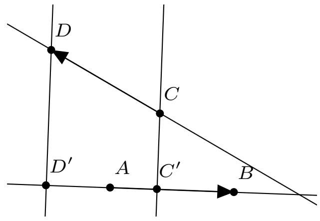
Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$,pour tout réel k, on a :
1. $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2 = \vec{u}^2$.
2. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
3. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
4. $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}$
5. $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

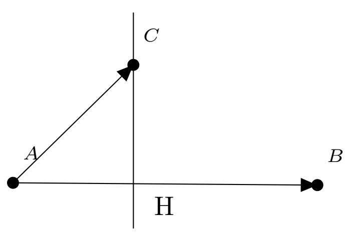
Définition 2(La projection orthogonale)

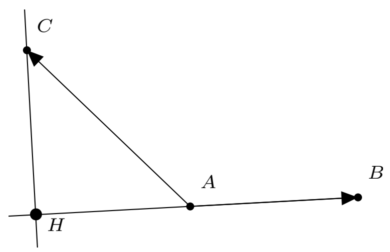
1. Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs.C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB).
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.
   — Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ ont le même sens,alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times C'D'$
   — Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ ont un sens contraire,alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times C'D'$





2. Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs.H est le projeté orthogonal sur la droite (AB). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.
   — Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens,alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$
   — Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire,alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$





1.2 Expression du produit scalaire à l'aide des normes uniquement-Identités remarquables

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ On a :
1. $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
2. $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
3. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2]$.
4. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$

1.3 Applications du produit scalaire

1.3.1 Les relations métriques dans un triangle rectangle

Propriété

ABC est un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC) alors on a :
1. $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Théorème de Pythagore).
2. $BA^2 = BH \times BC$
3. $CA^2 = CH \times CB$
4. $AH^2 = HB \times HC$

Propriété

Soit ABC un triangle.On a :
1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.
2. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 - AC^2)$.
3. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2 - AB^2)$.

1.3.2 Théorème d'Alkashi

Théorème

Soit ABC un triangle ,on a :
1. $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\hat{A}$
2. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos\hat{B}$
3. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos\hat{C}$

1.3.3 Théorème de la médiane

Théorème

Soit ABM un triangle ,si I est le milieu de $[AB]$ alors :
1. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$.
2. $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$.
3. $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2$.

2 Expression analytique du produit scalaire

2.1 base et repère orthonormé

Définitions

Soit $(\vec{i};\vec{j})$ une base du plan,et O un point du plan.
- On dit que $(\vec{i};\vec{j})$ est une base orthonormée si $\vec{i}.\vec{j} = 0$ et $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1$.
- On dit que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé si $(\vec{i};\vec{j})$ est une base orthonormée.
- Si $(\vec{i};\vec{j})$ est une base orthonormée et $(\overline{\vec{i};\vec{j}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $(O;\vec{i};\vec{j})$ est appelé un repère orthonormé direct.

Dans toute la suite, on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriété

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan.On a :$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Exemples

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

1. $\vec{u}(1;2)$ et $\vec{v}(2;3)$.
2. $\vec{u}(-1;4)$ et $\vec{v}(3;-2)$.
3. $\vec{u}(2;4)$ et $\vec{v}(-6;3)$.

Remarques

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan.On a :

1. $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, alors :
$$\cos(\overline{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}} \text{ et } \sin(\overline{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||} = \frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$
3. Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan alors $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_B)^2}$.

Exercice d'application 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.Soient $\vec{u}(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $\vec{v}(\frac{-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$.

1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Montrer que $(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormé direct.

Exercice d'application 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère les points $A(2;2\sqrt{3})$,$B(1;\sqrt{3})$ et $C(2;0)$.

1. Déterminer la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$.
2. Déterminer la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$.
3. Déterminer la mesure de l'angle géométrique $\widehat{ACB}$.

3 Applications

3.1 Équation d'une droite

Définitions

- On appelle vecteur directeur d'une droite tout vecteur non nul qui possède la même direction que cette droite.
- Si (D) est une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ alors pour tout point M du plan :
$$\begin{aligned} M \in (D) &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AM}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \end{aligned}$$
- On appelle vecteur normal d'une droite tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.
- Si (D) est une droite passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ alors pour tout point M du plan :
$$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$$

Propriétés

- Une équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b)$ est $(D) : b(x-x_A) - a(y-y_A) = 0$.
- Une équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ est $(D) : a(x-x_A) + b(y-y_A) = 0$.
- Une représentation paramétrique de la droite (D) passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b)$ est le système :
$$(D) : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Remarques

1. Un vecteur directeur de la droite (D) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}(-b; a)$.
2. Un vecteur normal de la droite (D) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{n}(a; b)$.

Exercice d'application 1

Soit (D) une droite passant par $A(2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; 2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D).
2. Donner un vecteur normal de la droite (D).
3. Soit (Δ) une droite perpendiculaire à (D) en A.Donner une équation cartésienne de (Δ).
4. Donner une représentation paramétrique de (Δ) et (D).

Exercice d'application 2

On considère les points $A(1; 1)$,$B(-2; 0)$ et $C(3; 5)$.

1. Déterminer une équation de la droite (D),médiatrice du segment $[AC]$.
2. Déterminer une équation de la droite (Δ) hauteur du triangle ABC issue de C.

3.2 Distance d'un point à une droite

Définition

Soit(D)une droite,A un point du plan et H le projeté orthogonal de A sur (D).Le nombre positif AH est appelé la distance du point A à la droite (D).Et on écrit :$d(A, (D)) = AH$.

Propriété

Soit (D) une droite d'équation :$ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$ un point du plan .La distance du point A à la droite (D) est : $d(A, (D)) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exemples

3.3 Équation cartésienne d'un cercle.

3.3.1 Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon.

Propriétés

— L'ensemble des points M du plan qui vérifient $\Omega M = R$ est le cercle de centre Ω et de rayon R.

— Une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R (R>0) est de la forme : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

3.3.2 Équation d'un cercle définie par son diamètre

Propriétés

- Soient A et Bdeux points distincts du plan,il existe un et un seul cercle (C) de diamètre$[AB]$.Le centre du cercle $(\mathcal{C})$ est le pointΩ milieu du segment $[AB]$ et son rayon R est la distance $\frac{AB}{2}$.
- L'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ est un cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$.
- Soient$A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points.Une équation du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ est
$$(\mathcal{C}) : \ (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$
.

3.3.3 Représentation paramétrique d'un cercle

Définition

Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan qui vérifient le système :
$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$$

Exercice d'application

1. Donner l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(-1; 2)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
2. Donner l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1; 2)$ et $A(4; -2) \in (\mathcal{C})$.
3. Donner l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ avec $A(1; 2)$ et $B(-3; 5)$.
4. Donner la représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(-1; -3)$ et de rayon 5.

3.3.4 Étude de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que :$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Soient a,b et c trois nombres réels.On considère l'ensemble (E) définie par :$(E) = M(x; y)/x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
Soit $M(x; y)$ un point du plan,on a :
$$\begin{aligned} M(x, y) \in (E) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{b}{2}\right)^2 = \tfrac{a^2+b^2-4c}{4} \end{aligned}$$
On pose $\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ et $k = \frac{a^2+b^2-4c}{4}$,on a : $M(x, y) \in (E) \Leftrightarrow \Omega M^2 = k$

Propriété

1. Si $k < 0$ alors (E) est l'ensemble vide.
2. Si $k = 0$ alors $(E) = \{\Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)\}$.
3. Si $k > 0$ alors (E) est un cercle de centre $\Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{k}$.

Exercice d'application

Déterminer dans chaque cas la nature de l'ensemble (E),des points $M(x; y)$ du plan vérifiant l´équation :

1. $x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$

3.3.5 Intérieur et extérieur d'un cercle

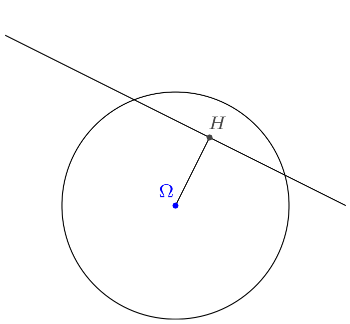
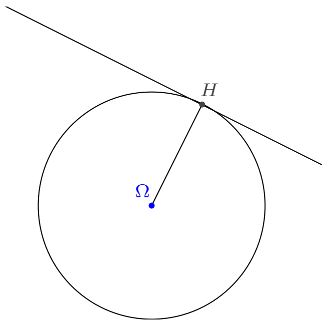
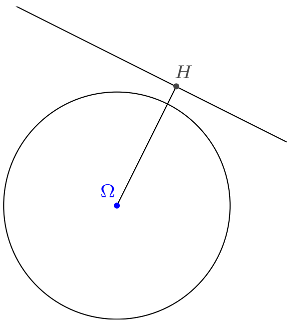
Définition

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre Ω et de rayon R et A un point du plan .
- Le point A est sur le cercle $(\mathcal{C})$ ssi :$\Omega A = R$.
- Le point A est à l'intérieur du cercle $(\mathcal{C})$ ssi :$\Omega A < R$.
- Le point A est à l'extérieur du cercle $(\mathcal{C})$ ssi :$\Omega A > R$.

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle d'équation :$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.Pour tout point $A(x_A; y_A)$ du plan,on a :
- Le point A est sur le cercle $(\mathcal{C})$ ssi :$x_A^2 + y_A^2 + ax_A + by_A + c = 0$.
- Le point A est à l'intérieur du cercle $(\mathcal{C})$ ssi :$x_A^2 + y_A^2 + ax_A + by_A + c < 0$.
- Le point A est à l'extérieur du cercle $(\mathcal{C})$ ssi :$x_A^2 + y_A^2 + ax_A + by_A + c > 0$.

3.3.6 Positions relatives d'une droite et d'un cercle.

Pour étudier la position relative d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre Ω et de rayon R avec une droite (D),il suffit de calculer la distance $d(\Omega, (D))$ et la comparer au rayon R.

$d(\Omega, (D)) < R$	$d(\Omega, (D)) = R$	$d(\Omega, (D)) > R$
		
La droite (D) coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en deux points distincts	La droite (D) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en un seul point	La droite (D) ne coupe pas le cercle $(\mathcal{C})$.

Exercice d'application

Étudier la position relative du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1; 2)$ et de rayon $R = 2$ et la droite (D) dans chacun des cas suivants :
1. $(D) : x + y + 2 = 0$
2. $(D) : x - y + 2 = 0$
3. $(D) : \sqrt{3}x + y + 2 - \sqrt{3} = 0$

Remarques

1. Les coordonnées des points d'intersection d'un cercle $(\mathcal{C})$ avec une droite (D),s'ils existent,sont les solutions du système d'équations de chacun d'eux.
2. Les coordonnées du point H le projeté de Ω sur la droite (D) sont les solutions du système composé de l'équation de la droite (D) et la droite passant par Ω et dirigée par un vecteur normal de (D).
3. Tout point M de la droite tangente au cercle $\mathcal{C}$ en un point A vérifie :$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$.