# Les suites numériques

## 1 Généralités sur les suites numériques

### 1.1 Activités

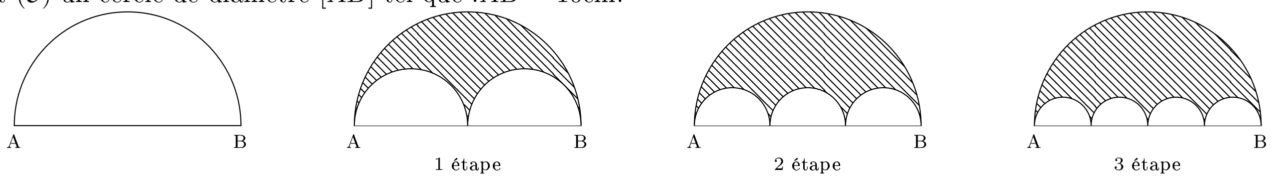
**Activité** 1

Observer,puis compléter par quatre nombres convenables pour continuer la série de chacune des listes suivantes :

1. $1; 3; 5; 7; 9; 11; ...$
2. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}....$
3. $-3; \frac{-3}{2}; \frac{-3}{4}; \frac{-3}{8}; \frac{-3}{16}; \frac{-3}{32}...$
4. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}....$

**Activité** 2

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$ tel que :$AB = 10$cm.




On partage successivement le segment $[AB]$ en deux,puis trois,puis quatre segments de même longueur.A chaque étape ,on construit sur les segments obtenus des demi-cercles et on s'intéresse à l'aire du domaine coloré en gris.

1. On note $a_1$,$a_2$ et $a_3$ l'aire du domaine coloré en gris aux étapes 1,2 et 3 décrites ci-dessus.Calculer $a_1$,$a_2$ et $a_3$.
2. Faire la figure à l'étape 4 et calculer $a_4$.
3. À l'étape $n$,on partage le segment $[AB]$ en $n+1$ segments de même longueur.Vérifier que :$a_n = \dfrac{25\pi}{2} \times \dfrac{n}{n+1}$.

### 1.2 Définition et notation

Soit $n_0$ un entier naturel.On pose :$I = \{n \in \mathbb{N}/n \geq n_0\}$.

**Définition**

Toute fonction numérique $u$ définie sur $I$ est appelée suite numérique.L'image par $u$ d'un entier $n$ de $I$ est notée $u_n$ et se lit : $u$ indice $n$ ou simplement $u_n$.$u_n$ est appelé le terme général de la suite $u$.

**Notation**

— une suite numérique $u$ se note $(u_n)_{n\in I}$ ou $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.
— Si $I = \mathbb{N}$, On note la suite $u$ par : $(u_n)$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$.
— Si $I = \mathbb{N}^*$, On note la suite $u$ par : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geq 1}$.
— Le réel $u_{n_0}$ est le premier terme de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

**Exemples**

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 3}$ une suite numérique définie par : $u_n = \frac{1}{3}n^2 - 1$.pour chaque terme $u_n$ on a :$u_n = f(n)$ ou $f$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - 1$.On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est définie explicitement.Calculer les quatre premiers termes de la suite.

| | |
|---|---|
| .............................................. | .............................................. |
| .............................................. | .............................................. |

2. Soit $(v_n)$ une suite numérique définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n^2 - 1 \end{cases}$

   Pour chaque terme on a :$v_{n+1} = f(v_n)$ ,ou $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - 1$. On dit que la suite $(v_n)$ est définie par récurrence. Calculer les quatre premiers termes de la suite.

   | ............................................ | ............................................ |
   | ............................................ | ............................................ |

3. Soit $(w_n)$ une suite numérique définie par : $\begin{cases} w_0 = -1 \text{ et } w_1 = 2 \\ w_{n+2} = 2w_n + 3w_{n+1} \end{cases}$

   $(w_n)$ est définie par récurrence.Calculer $w_2$,$w_3$ et $w_4$.

   | ............................................ | ............................................ |
   | ............................................ | ............................................ |

## 1.3 Suite majorée-Suite minorée-Suite bornée

**Définition**

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.
- On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel $M$ tel que : $\forall n \geqslant n_0 :\ u_n \leqslant M$.
- On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel $m$ tel que : $\forall n \geqslant n_0 :\ u_n \geq m$.
- On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée s'ils existent deux réels $m$ et $M$ tels que : $\forall n \geqslant n_0 :\ m \leqslant u_n \leqslant M$.

**Remarques**

- Une suite à la fois minorée et majorée est dite suite bornée.
- $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite bornée s'il existe un réel $\alpha$ strictement positif tel que :$\forall n \geqslant n_0 :\ |u_n| \leqslant \alpha$

**Exemples**

1. Soit $(u_n)$ une suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n = \frac{2n+3}{n+4}$.
   (a) Montrer que $(u_n)$ est majorée par 2.
   (b) Montrer que $(u_n)$ est minorée par $\frac{3}{4}$.
2. Soit $(v_n)$ une suite définie par : $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \dfrac{5v_n + 3}{v_n + 7} \end{cases}$

   Monter que $(v_n)$ est bornée par $-3$ et 1.
3. Soit $(w_n)$ une suite définie par :$w_n = 2\sin(n) - 1$
   Montrer que la suite $(w_n)$ est bornée.

## 1.4 Monotonie d'une suite

**Définition**

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si et seulement si $\forall n \geqslant n_0 :\ n < m \Rightarrow u_n \leqslant u_m$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si et seulement si $\forall n \geqslant n_0 :\ n < m \Rightarrow u_n < u_m$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \geqslant n_0 :\ n < m \Rightarrow u_n \geq u_m$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \geqslant n_0 :\ n < m \Rightarrow u_n > u_m$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante si et seulement si $\forall n \geqslant n_0 :\ n < m \Rightarrow u_n = u_m$

**Propriété**

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si et seulement si $\forall n \geqslant n_0 :\ u_n \leqslant u_{n+1}$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si et seulement si $\forall n \geqslant n_0 :\ u_n < u_{n+1}$

- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \geqslant n_0 : \ u_n \geq u_{n+1}$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \geqslant n_0 : \ u_n > u_{n+1}$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante si et seulement si $\forall n \geqslant n_0 : \ u_n = u_{n+1}$

**Exemples**

- Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq n_0}$ dans les cas suivants :
  a) $n_0 = 0, \ u_n = 1 - \sqrt{n+2}$ b) $n_0 = 1, \ u_n = 3n - \frac{2}{n}$
  c) $n_0 = 1, \ u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ d) $n_0 = 0, \ u_n = \frac{2^{n+3}}{3^n}$
- Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$
  1. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}; 0 < u_n < 1$.
  2. En déduire que $(u_n)_n$ est décroissante.

# 2 Suites arithmétiques - Suites géométriques

## 2.1 Suites arithmétiques

**Définition**

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite arithmétique si et seulement si on ajoute **toujours** le même nombre $r$ pour passer d'un terme au suivant :

$$u_{n+1} = u_n + r \qquad \forall n \geq n_0$$

Ce nombre $r$ s'appelle la raison de la suite $(u_n)$

**Exemples**

**Reconnaître une suite arithmétique :**
Pour qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ soit arithmétique, il faut et il suffit que, pour tout $n \geq n_0$, la diffèrence $u_{n+1} - u_n$ soit constante : $u_{n+1} - u_n = r \in \mathbb{R}$. Le nombre $r$ est la raison de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.
Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

a) $u_n = 3n - 2$ b) $u_n = n^2 - 3$ c) $u_n = -4n + 1$

**Propriété :Terme général d'une suite arithmétique**

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison $r$, alors $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.

**Exemple**

$(u_n)$ est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2. Donner $u_n$ le terme général de la suite $(u_n)$

**Conséquence**

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison $r$, alors $\forall n \geq n_0; \forall p \geq n_0; u_n = u_p + (n - p)r$.

**Exemple**

Considérons une suite arithmétique $(v_n)$ telle que $v_{27} = 6$ et $v_{39} = 10$
Déterminer $(v_n)$. Calculer $v_7$ et $v_{74}$

**Propriété :Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique**

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique. On pose $S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ avec $n_0 \leq p < n$.On a :
$S_n = (n-p+1)(\frac{u_p + u_n}{2})$

**Exemples**

1. Somme des $n$ premiers entiers est :$1+2+\cdots+n-1+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. Calculer la somme des 50 premiers entiers impairs.
3. Calculer la somme des 50 premiers entiers pairs en partant de 12.

## 2.2 Suites géométriques

**Définition**

Une suite $(u_n)n \geq n_0$ est géométrique si et seulement si, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} = u_n \times q$ où $q$ est la raison de la suite.
Autrement dit, une suite gémétrique est une suite de nombres telle que chacun de ses termes s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre.

**Exemples**

— La suite $(u_n)_n$ définie par : $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 : $u_{n+1} = 2 \times u_n$.
— Reconnaître une suite géométrique :
Pour qu'une suite $(u_n)$ soit géométrique, il faut et il suffit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes $u_n$ soient non nuls et que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit constant : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \in \mathbb{R}^*$.
Le nombre $q$ est la raison de la suite $(u_n)$.

— Montrer que la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \frac{2}{3^n}$ est géométrique
— La suite $(v_n)$ est définie par $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = 3v_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $w_n = v_n + 2$ Montrer que $(w_n)$ est une suite géométrique

**Propriété :Terme général d'une suite géométrique**

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ alors on a : $u_n = q^{n-n_0} \times u_{n_0}$

**Exemple**

Soit $(u_n)$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3. On a alors : $u_n = 2 \times 3^n$
On peut, par exemple calculer directement $u_5 = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 = 486$

**Propriété**

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ alors quels que soient les entiers naturels $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$ on a :

$$u_n = q^{n-p} \times u_p$$

**Exemple**

$(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites géométriques. Déterminer $u_5$, $u_8$, $v_7$ et $v_{15}$ sachant que :
a) $u_0 = 6$ et $q = -\frac{1}{3}$
b) $v_5 = 1$ et $v_{10} = 32$

**Propriété :Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique**

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^* - 1$. On pose $S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ avec $n_0 \leq p < n$.
On a : $S_n = u_p(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q})$

**Exemple**

1. Soit $(u_n)$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et de raison $q = \dfrac{3}{2}$. Calculer $S = u_4 + u_5 + \cdots + u_{14}$
2. Soit $(v_n)$ la suite géométrique telle que :$v_2 = \frac{3}{4}$ et $v_5 = \frac{3}{32}$.
   Calculer $S = v_2 + v_3 + \cdots + v_{11}$.