Vecteurs dans l'espace-Géométrie analytique dans l'espace.

1 Vecteurs dans l'espace

1.1 Extension de la notion de vecteur à l'espace

Propriétés

1. Soient A et B deux points de l'espace.Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :
   — Sa direction (la droite (AB)).
   — Son sens(de A vers B).
   — Sa norme (la distance AB).
2. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. On dit que deux vecteurs sont égaux,s'ils ont même direction,le même sens et la même norme.
4. Soient $ABCD$ un quadrilatère dans l'espace,on a : $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
5. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Somme de deux vecteurs dans l'espace).
6. Pour tous points A,B et C de l'espace,on a :$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles).
7. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $k \in \mathbb{R}^*$.Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur $\vec{v}$ noté $k\vec{u}$,qui vérifie les conditions suivantes :
   — $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.
   — Si $k > 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens.si $k < 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont de sens contraire.
   — $\|\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.
8. On a :$0.\vec{u} = \vec{0}$ et $k\vec{0} = \vec{0}$.
9. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k' on a :

   $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$. $\quad k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$. $\quad k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

   $1.\vec{u} = \vec{u}$. $\quad k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.
10. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est colinéaires s'il existe k un nombre réel tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.
11. Soient A,B et C trois points de l'espace.On dit que A ,B et C sont alignée si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2 Définition vectorielle d'une droite de l'espace

Définition

Soit A un point de l'espace E et $\vec{u}$ un vecteur non nul.L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ où $k \in \mathbb{R}$,est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$,cette droite est notée $D(A;\vec{u})$ et on écrit :
$D(A;\vec{u}) = \{M \in E/\overrightarrow{AM} = k\vec{u}; k \in \mathbb{R}\}$

3 Définition vectorielle d'un plan-les vecteurs coplanaires

3.1 Définition vectorielle d'un plan

Définition

— Soit (P) un plan de l'espace et A,B et C sont trois points non alignés du plan (P).On dit que (P) est un plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
— Deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point A définissent un plan unique noté :(P).Ce plan passe par A

et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs.On écrit $(P) = P(A;\vec{u};\vec{v}) = \{M \in E / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}; (x;y) \in \mathbb{R}^2\}$.

3.2 Vecteurs coplanaires

Définitions

- On dit que quatre points A,B,C et D de l'espace sont coplanaires s'ils sont dans un même plan.
- Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Il existe quatre points A, B, C et D de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si les quatre points A, B, C et D le sont.

Propriétés

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaire et $\vec{w}$ un vecteur de l'espace.Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si,il existe deux nombres réels x et y tels que :$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
- Soit A, B, C et D quatre points de l'espace, tels que A, B et C ne soient pas alignés. Alors, les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que :$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

4 Géométrie analytique dans l'espace

4.1 Coordonnées d'un point dans un repère-Coordonnées d'un vecteur dans une base

Définitions

Soient $\vec{i}$,$\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires et O un point de l'espace.

- Le triplet $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est appelé une base de l'espace.
- Le quadruplet $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est appelé un repère de l'espace.
- Quatre points non coplanaires déterminent une base et un repère de l'espace.
- Pour tout point M de l'espace,il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de réels tel que :$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.Le triplet $(x;y;z)$ est appelé le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.$x$ est l'abscisse du point M,y est l'ordonnée du point M ,z est la cote du point M et on écrit :$M(x;y;z)$.
- Tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace,il existe un unique triplet de réels $(x;y;z)$ tel que :$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et on écrit :$\vec{u}(x;y;z)$.

Dans toute la suite ,l'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

4.2 Déterminent de trois vecteurs

4.2.1 Condition de colinéarité de deux vecteurs

Propriété

Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaire si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \neq 0$.

4.2.2 Vecteurs coplanaires

Définition

Soient $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$ trois vecteurs de l'espace.On appelle le déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,le nombre réel : $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$

- Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si : $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$.
- Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si et seulement si : $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$.

4.3 Représentation paramétrique d'une droite

Définition

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(a;b;c)$ un vecteur non nul.Le système : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_A + ct \end{cases}$ est appelé représentation paramétrique de la droite $D(A,\vec{u})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Position relatives de deux droites

Propriété

Soient $(D) = D(A;\vec{u})$ et $(\Delta) = D(B;\vec{v})$ deux droites de l'espace.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A \in (\Delta)$ ou $B \in (D)$ alors (D) et (Δ) sont confondues.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A \notin (\Delta)$ alors (D) et (Δ) sont strictement parallèles.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}) = 0$ alors (D) et (Δ) sont sécantes(se coupent en un point).
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}) \neq 0$ alors (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires.

4.4 Représentation paramétrique d'un plan-Équation cartésienne d'un plan

4.4.1 Représentation paramétrique d'un plan

Définition

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace,$\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs non colinéaires.Le système $\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \quad ((t;t') \in \mathbb{R}^2) \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$ est appelé une représentation paramétrique du plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4.4.2 Équation cartésienne d'un plan

Définition

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace,$\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs non colinéaires.L'équation :

$$\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - (y - y_A)\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + (z - z_A)\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$$

pour tout point $M(x;y;z)$ de l'espace est appelé une équation cartésienne du plan (P).
Une équation cartésienne d'un plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a,b,c et d sont des réels tels que $(a;b;c) \neq (0;0;0)$.

4.4.3 Positions relatives de deux plans

Propriété

Soient $(P) = P(A;\vec{u};\vec{v})$ et $(Q) = P(B;\vec{u'};\vec{v'})$ deux plans de l'espace.
- Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'}) = 0$ et $det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'}) = 0$ alors (P) et (Q) sont confondus ou strictement parallèles.
- Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'}) \neq 0$ et $det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'}) \neq 0$ alors (P) et (Q) se coupent suivant une droite.

4.5 Deux équations cartésiennes d'une droite

Définition

Soit (D) une droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur $\vec{u}(a;b;c)$.

1. Si $a \neq 0$,$b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors le système (S) : $\frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c}$ est appelé une équation cartésienne de la droite (D).
2. Si l'un des nombres(un seul) est nul (par exemple $a = 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$),alors le système (S) : $\begin{cases} \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c} \\ x = x_A \end{cases}$ est une équation cartésienne de la droite (D).
3. Si deux de ces nombres sont nuls(par exemple $a = 0$ et $b = 0$ et $c \neq 0$) alors le système (S) : $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$ est une équation cartésienne de la droite (D).

4.5.1 Positions relatives d'une droite et d'un plan-Étude analytique

Propriété

Soient une droite $(D) = D(A;\vec{w})$ et un plan $(P) = P(B;\vec{u};\vec{v})$.

1. Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$ et $A \in (P)$,alors $(D) \subset (P)$
2. Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$ et $A \notin (P)$,alors (D) est strictement parallèle à (P).
3. Si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$,alors (D) perce le plan (P).