Devoir libre n° 1

Exercice 1

1. Soit n un entier naturel .
   (a) Étudier la parité des nombres suivants : (i) n^2+3n+4 (ii) $(2021)^n+4$ (iii) $2n^3+17n$
   (b) Chercher tous les entiers naturels n tel que : $\dfrac{2n+7}{n+2} \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que : $\dfrac{2^n}{5^m} \in \mathbb{D}$ pour tout m et n de $\mathbb{N}$.
   (d) Montrer que : $A = 7^{n+1} + 8 \times 7^n$ est divisible par 15.
2. Soient $a = 3060$, $b = 1224$ et $c = 71$.
   (a) Montrer que c est un nombre premier.
   (b) Décomposer les nombres a et b en produit de facteurs premiers.
   (c) Déterminer $PGCD(a,b)$ et $PPCM(a,b)$.
   (d) Simplifier (i) $A = \dfrac{a}{b}$ (ii) $B = \dfrac{7}{a} + \dfrac{11}{b}$ (iii) $C = \sqrt{ab}$

Exercice 2

1. Factoriser les expressions suivantes :
   (a) $A = (x-\sqrt{2})(3x-1) + (x^2-2)(1-x)$
   (b) $B = x^3 - 8$
   (c) $C = x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 + (x^2-3)$
2. Développer et réduire : $(x-\sqrt{3})(2-x)(x+\sqrt{3}) - (x-3)^3$.

Exercice 3

ABC est un triangle.
Soient I, J et K des points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}.$$

1. Montrer que $\overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CB}$.
2. Construire les points I, J et K.
3. (a) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
   (b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) En déduire que les points I, J et K sont alignés.
4. Soit F un point tel que $\overrightarrow{AF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ}$.
   (a) Construire le point F.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
   (c) Montrer que F est le milieu du segment $[BC]$.