Devoir libre n° 1

Exercice 1

1. Simplifier les expressions suivantes :
$A = \cos\left(x + \frac{17\pi}{2}\right) + \sin(x - 23\pi) + 2\cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right)$
$B = \dfrac{\cos^3(x) + \cos(x)\sin^2(x) + \sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$ $\qquad C = \cos(x)\tan(x + \pi) + \sin(x)\tan(\frac{\pi}{2} + x)$
$D = \cos^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{4\pi}{10} + \cos^2\frac{6\pi}{10} + \cos^2\frac{9\pi}{10}$
2. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

On pose $A(x) = 4\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 5\sin(x)$.

1. Calculer $A(0)$;$A\left(\frac{\pi}{2}\right)$;$A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
2. Vérifier que $A(\pi - x) = A(x)$.
3. Calculer $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $A\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.
4. Montrer que $A(x) = (2\sin(x) - 1)(\sin(x) - 2)$.
5. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation :$A(x) = 0$.
6. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation :$A(x) < 0$.

Exercice 3

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
   i. $(E_1) : 2x^2 + x - 1 = 0$ ii. $(E_2) : -4x^2 + 4\sqrt{3}x - 3 = 0$
   iii. $(E_3) : -3x^2 - x = 0$

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
   i. $(E_4) : 2x^4 + x^2 - 1 = 0$ ii. $(E_5) : -4x + 4\sqrt{3x} - 3 = 0$
   iii. $(E_6) : -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} = 0$

   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :
   i. $(I_1) : (2x^2 + x - 1)(-4x^2 + 4\sqrt{3}x - 3) > 0$
   ii. $(I_2) : \frac{2x^2+x-1}{-3x^2-x} \leq 0$
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
   i. $(E_7) : |4x^2 - 1| = 1 + |x|$ ii. $(E_8) : (4x^2 - 1)^2 = 1 + x^2$ iii. $(E_9) : \sqrt{4x^2 - 1} = 1 + 2x$

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :
   i. $(I_3) : |4x^2 - 1| > 1$ ii. $(I_4) : (4x^2 - 1)^2 \leq 1$ iii. $(I_4) : \sqrt{4x^2 - 1} \geq 1$
3. Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 5x - 2y - 4 < 0 \\ -3x + 4y \leq 6 \end{cases}$